

文章编号 1004-924X(2008)10-1995-07

一种改进的 Harris 角点提取算法

王 崴^{1,2}, 唐一平¹, 任娟莉³, 时冰川¹, 李培林², 韩华亭²

(1. 西安交通大学 机械制造系统工程国家重点实验室, 陕西 西安 710049;

2. 空军工程大学 导弹学院 发射工程系, 陕西 三原 713800;

3. 西安工业大学 艺术与传媒学院, 陕西 西安 710032)

摘要:针对 Harris 角点检测算法对 T 型和斜 T 型角点存在定位不准确以及运算速度慢的问题, 提出了一种改进算法。改进算法计算目标像素点的 8 邻域范围内与之灰度相似的点的数目, 然后对目标像素点周围其他像素点按同样方法处理, 并对得到的计算数据进行比较, 分析出局部范围内的像素点的灰度值分布。根据比较结果, 从中遴选出部分像素点作为下一步角点检测的计算对象, 并计算其角点响应函数值, 如果角点响应函数值大于设定的阈值, 该点则会被确定为最终的角点。实验结果表明:改进算法的角点检测时间仅为原算法的 14.3%, 并实现了对 T、斜 T 型角点准确定位, 提高了 Harris 角点检测算法的检测效率和精度。

关键词:机器视觉; 图像处理; 角点检测; Harris 算法; 角点响应函数

中图分类号:TP391.4 **文献标识码:**A

An improved algorithm for Harris corner detection

WANG Wei^{1,2}, TANG Yi-ping¹, REN Juan-li³, SHI Bing-chuan¹, LI Pei-lin², HAN Hua-ting²

(1. *State Key Laboratory for Manufacturing System Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*; 2. *Launch Engineering Department, Missile Institute of Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, China*;

3. *School of Art and Media, Xi'an Technological University, Xi'an 710032, China*)

Abstract: An improved algorithm for Harris corner detection is proposed by considering the limitations of inaccurate localization to two kinds of corners (T and diagonal T) and low efficiency in Harris algorithm. The improved algorithm is used to calculate the number of points that the gray level is similar to that of the target pixel within 8 neighborhoods of the target pixel, and then to treat the other points in the same manner. Some of the pixels are selected as the calculating objects for the next step of corner detection by analyzing distribution of the pixels in local area and comparing the calculated data, and the values for their corner response functions are calculated. if the value is larger than threshold, it will be considered as the final corner. The experimental results show that the computation time of improved algorithm is only 14.3% that of the original Harris algorithm, and it can realize the accurate localization to T and diagonal T corners, which means that improved algorithm acquires better effi-

收稿日期:2007-10-29; 修订日期:2008-03-13.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 50505051)

ciency and higher accuracy in Harris corner detection.

Key words: machine vision; image processing; corner detection; Harris algorithm; corner response function

1 引言

角点为图像中灰度变化剧烈的点或者图像中轮廓边界的相交点,反映了图像中的重要信息,提取角点有利于突出图像中的重要信息,淡化其中的次要内容。角点特征与直线、圆、边缘等其他特征相比,具有提取过程简单、结果稳定、提取算法适应性强的特点。大多数的视觉处理任务,如图像匹配、形状分析、运动目标检测都是基于角点检测而展开,因此角点检测结果的好坏会直接影响后续工作的进行。在机器视觉中,角点检测被证实为一种重要的分析手段。

现有的角点提取算法主要可分为两种:一是基于边缘轮廓的角点提取算法,先提取图像信息中的边缘轮廓,再求角点,Kitchen-Rosenfeld^[1]、CSS^[2]、Freeman^[3]链码法、Wang-Brady^[4]等是这类算法中的典型;二是直接对灰度图像进行角点检测,Moravec^[5]、Harris^[6]、Trajkovic^[7]、SUSAN^[8]等是这类算法中的典型。

由于基于灰度的角点提取算法直接对图像中像素点的灰度值进行处理,避免了基于边缘轮廓的角点提取算法在提取轮廓时存在的误差,因此在实际研究中得到了更多关注。其中的 Harris 算法与 SUSAN 算法是该类算法中应用最为广泛的两种角点检测方法。

Harris 算法存在一个最大的不足就是对尺度变化较为敏感,在大的尺度下检测为角点的那些像素点在小尺度下就可能成为边缘上的点或其他类型特征点,为此国内外对 Harris 角点检测算法的改进也主要集中在如何达到尺度不变性。C. Schmid^[9]提出了一种改进的 Harris 角点提取算法,该算法对不同的尺度能达到相对较高的角点检测重复率。陈白帆^[10]等利用 K. Mikolajczyk^[11]和 C. Schmid 的研究成果构造了 Harris-Laplacian 算子,该算法在提取角点时具有尺度不变性。王展^[12]等利用小波变换方法也达到了角点检测的尺度不变性。另外国内的学者李博^[13]等对 Harris 算法中的高斯滤波器进行研究,采用

效果更好的 B 样条函数作为平滑滤波器。

现有改进算法大多集中于对 Harris 角点检测算法尺度不变性的改进,对算法的检测精度和效率方面的改进较少。本文在对 Harris 角点检测原理算法进行详细分析的基础上,针对 Harris 角点检测算法在检测精度和效率方面的不足,提出了一种改进 Harris 算法,并通过实验对改进算法的精度和效率进行了验证。

2 Harris 角点检测原理

Harris 算法以 Moravec 算法为基础。Moravec 算法的基本原理是:取以目标像素点为中心的一个小窗口,并将窗口沿上下左右 4 个方向移动,计算 4 个方向上窗口内的灰度变化,并以 4 个值中的最小值为该目标像素点的角点响应函数值,若该值大于阈值,则为角点。

Harris 算法则计算窗口沿任何方向移动后的灰度变化,并用解析形式表达。设以像素点 (x, y) 为中心的小窗口在 X 方向上移动 u , Y 方向上移动 v , Harris 给出了灰度变化度量的解析表达式:

$$E_{x,y} = \sum \omega_{x,y} (I_{x+u,y+v} - I_{x,y})^2 = \sum \omega_{x,y} \left(u \frac{\partial I}{\partial X} + v \frac{\partial I}{\partial Y} + o(\sqrt{u^2 + v^2}) \right)^2, \quad (1)$$

其中, $E_{x,y}$ 为窗口内的灰度变化度量; $\omega_{x,y}$ 为窗口函数,一般定义为 $\omega_{x,y} = e^{-(x^2+y^2)/\sigma^2}$; I 为图像灰度函数,略去无穷小项有:

$$E_{x,y} = \sum \omega_{x,y} [u^2 (I_X)^2 + v^2 (I_Y)^2 + 2uv I_X I_Y] = Au^2 + 2Cuv + Bv^2, \quad (2)$$

其中 (\otimes) 表示卷积, $A = (I_X)^2 \otimes \omega_{x,y}$, $B = (I_Y)^2 \otimes \omega_{x,y}$, $C = (I_X \cdot I_Y) \otimes \omega_{x,y}$ 。

将 $E_{x,y}$ 化为二次型有:

$$E_{x,y} = [u \quad v] \mathbf{M} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \quad (3)$$

\mathbf{M} 为实对称矩阵:

$$\mathbf{M} = \sum \omega_{x,y} \begin{bmatrix} I_x^2 & I_x \cdot I_y \\ I_x \cdot I_y & I_y^2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

通过对角化处理得到:

$$E_{x,y} = \mathbf{R}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathbf{R}, \quad (5)$$

其中, \mathbf{R} 为旋转因子, 对角化处理后并不改变以 u, v 为坐标参数的空间曲面的形状, 其特征值反应了两个主轴方向的图像表面曲率。当两个特征值均较小时, 表明目标点附近区域为“平坦区域”; 特征值一大一小时, 表明特征点位于“边缘”上; 只有当两个特征值均比较大时, 沿任何方向的移动均将导致灰度的剧烈变化。Harris 的角点响应函数(CRF)表达式由此而得到:

$$CRF(x, y) = \det(\mathbf{M}) - k(\text{trace}(\mathbf{M}))^2, \quad (6)$$

其中: $\det(\mathbf{M})$ 表示矩阵 \mathbf{M} 的行列式, $\text{trace}(\mathbf{M})$ 表示矩阵的迹。当目标像素点的 CRF 值大于给定的阈值时, 该像素点即为角点。

3 Harris 算法分析

整体来说, Harris 算法是一种非常有效的图像角点提取算法, 其优点主要表现在: (1) 提取的角点均匀而且合理。Harris 算法对图像中的每个点都计算其响应值, 然后在邻域范围内寻找最优点。实验表明, 在纹理信息丰富的区域, Harris 算法可以提取大量的有用角点, 在纹理信息较少的区域内提取的角点较少。(2) 提取的角点稳定

可靠, 只要不存在大尺度变化, Harris 算法都能提取出比较稳定的角点特征。

Harris 算法也存在一些缺点, 主要表现在其角点定位有偏差, 特别是在一些特殊的角点处, 往往检测不到真正的角点。下面结合几类常见的角点类型, 分析 Harris 算法定位精度低的原因。实际图像中的角点主要有如图 1 所示几种。

为了验证 Harris 算法对 5 种类型角点检测的定位精度, 对应于图 1 中的 5 种不同类型角点, 合成了 5 幅人工图像, 图像大小为 128×128 , 检测结果如表 1 所示。

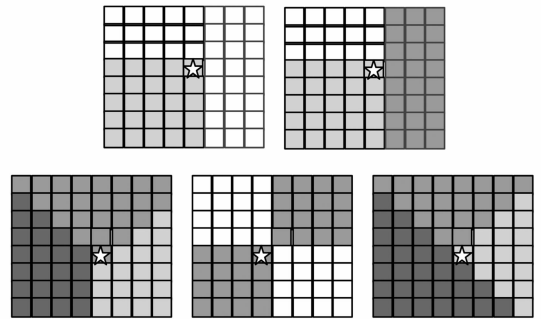


图 1 5 种不同类型角点(从左至右依次为 L 型、T 型、Y 型、X 型、斜 T 型)

Fig. 1 Five types of corners(from left to right: L, T, Y, X and diagonal T)

表 1 Harris 算法与改进算法对 5 种类型的角点检测结果对比

Tab. 1 Comparison of detection results for five types of corners between Harris algorithm and improved algorithm

角点类型	L	T	斜 T	X	Y
真实角点坐标	(64, 63)	(63, 63)	(64, 64)	(64, 63)	(64, 64)
Harris 算法检测结果	(64, 63)	(64, 62)	(63, 63)	(63, 63) (63, 64) (64, 63) (64, 64)	(64, 64)
改进 Harris 算法检测结果	(64, 63)	(63, 63)	(64, 64)	(63, 63) (63, 64) (64, 63) (64, 64)	(64, 64)

从实际的检测结果与真实角点对比可以看出 Harris 算法在 T 型、斜 T 型时存在定位偏差(T 型为水平方向有一个像素的偏差, 斜 T 型为水平和垂直方向上均有一个像素偏差), 对于 X 角点, Harris 算法检测 4 个角点, 可以认为是合理的, 该图中 4 个矩形在结合处的 4 个顶点均可认为是角点, 因此对于 X 型角点, 也可以认为算法能够准确定位角点。

该算法的另一个缺点是检测速度较慢, 其主要原因是对整个图像的每个像素(边界像素点除

外)都进行角点响应函数值的计算, 当图像尺寸较大时, 耗时较多, 例如本文实验中对图分辨率为 960×960 的图像提取角点需要 2.584 592 s, 针对 $1\ 600 \times 1\ 200$ 的图像提取耗时达到 5.419 184 s, 不适合实时处理的场合。

4 改进 Harris 算法原理

Harris 角点检测算法具有对 T 型、斜 T 型角点定位精度有偏差、运算速度较慢的缺点。针

对这两点不足,本文提出了一种改进的 Harris 算法,该算法比原始 Harris 算法在定位精度及运算效率方面有了一定的提高。

Harris 角点检测算法在检测 T 型、斜 T 型角点时,之所以定位精度低,是因为在计算角点响应函数值时采用了差分方向导数计算方式,与理想的方向导数之间有误差从而在非最大值抑制时将真正角点去除。为此,探索一种合理的方向导数求解方法来消除周围像素点对检测结果的影响是提高 Harris 算法检测定位精度的关键。

对于目标像素点,考虑其 8-邻域范围内的像素点,计算该范围的像素点与目标像素点的灰度差的绝对值(记为 Δ),如果该值小于等于设定的阈值(记为 T),则认为该像素点与目标像素点相似。统计在目标像素点的 8-邻域范围内与之相似的像素点个数,以函数 $K(i, j)$ 表示:

$$K(i, j) = \sum_{(x, y)} R(i+x, j+y) \quad (-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, \text{且 } x \neq 0, y \neq 0), \quad (7)$$

其中:

$$R(i+x, j+y) = \begin{cases} 1, \Delta(i+x, j+y) \leq T \\ 0, \Delta(i+x, j+y) > T \end{cases} \quad (8)$$

从定义中可以看出: $0 \leq K(i, j) \leq 8$, 现在讨论 $K(i, j)$ 值的含义。

(1) $K(i, j) = 8$, 表示当前目标像素点的 8 邻域范围内都是与之相似的像素点, 所以该像素点应该为一区域内部的点, 因此角点检测时, 也应该排除此类像素点。

(2) $K(i, j) = 0$, 表示当前目标像素点的 8 邻域范围内没有与之相似的像素点, 所以该像素点为孤立像素点或者是噪声点, 因此角点检测时, 应该排除此类像素点。

(3) $K(i, j) = 7$, 可以归结为以下的两者情况, 其他情形都可以通过旋转来得到。对于图 2 中左图, 可能的角点应该是目标像素点的正上方的那个像素点, 右图中可能的角点应该是目标像素点右上方的那个像素点, 故这种情况下, 目标像素点不应该作为角点的候选点。

(4) $K(i, j) = 1$, 可以归结为图 3 中的两种情况(图中白色区域仅表示与目标像素不相似, 而两个白色区域像素可能是相似的, 也可能不相似), 在这两种情况下, 目标像素点可能为角点, 也

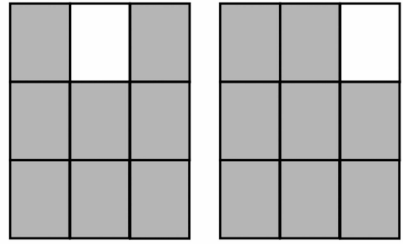


图 2 $K(i, j) = 7$ 时的两种情况

Fig. 2 Two cases when $K(i, j) = 7$

可能为离散的噪声点或者两个孤立点连在一起, 在这种情况下需要考察更大范围内的像素点的灰度分布情况, 可以考察在 24 邻域范围内与目标像素点相似的个数, 如果仍然较小或者相似点数目比例不变, 则可以认为该像素点是噪声点或零散分布的孤立像素点。

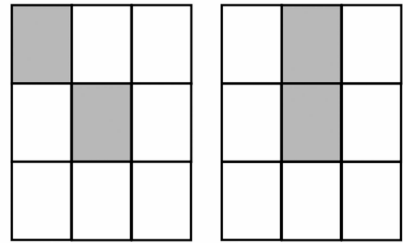


图 3 $K(i, j) = 1$ 时的两种情况

Fig. 3 Two cases when $K(i, j) = 1$

(5) $2 \leq K(i, j) \leq 6$, 情况比较复杂, 无法确认像素点性质, 但通过第三节, 可以看出如果目标像素点为角点, 则该点处的 K 值应该是其 8-邻域范围内的最小值(如图 4 所示), 反之, 则不能确定该点一定为角点。为此计算目标像素点及其 8-邻域范围内的像素点的 K 值, 寻找最小值, 如果最小值与目标像素点处的 K 值相等, 则保留该点(对于 $K=5$ 的情况做进一步讨论), 作为下一步 Harris 算法计算的候选点, 如果最小值与目标像素点 K 值不相等, 则剔除该点, 以减少下一步工作量。如果满足 Harris 算法中的角点条件, 则认为该点为角点, 这样避免了非最大值抑制时错误角点将正确角点抑制而将真正的角点排除的可能性, T 型, 斜 T 型角点出现角点定位偏差就是这个原因。如果 $K=5$, 即目标像素点 8-邻域范围内的任意点的 $K \geq 5$, 说明在这些点的局部邻域

内存在较多的相似点,很有可能是边界上的点,因此考虑目标像素点左右两侧像素点的 K 值,如果两侧 K 值均为 5,则目标像素点为边缘上的点,不应作为候选角点,同理,考虑对角线上两侧的像素点 K 值,可以得出同样的结论。

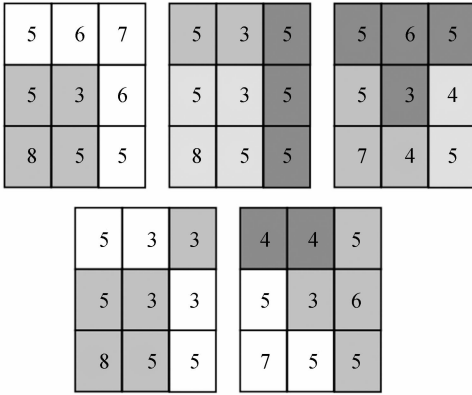


图 4 5 种类型角点的 8-邻域 K 值比较

Fig. 4 Comparison of K of five types corners within 8 neighborhoods

通过上面的步骤排除一些候选像素点后,再计算那些候选像素点的 Harris 算法角点响应函数值,如果高于阈值,则为最终角点。

5 改进 Harris 算法性能分析

5.1 精度分析

Harris 算法在检测 T 型、斜 T 型角点时,由于真实角点周围像素的影响,使得非真实角点的函数响应值大于真实角点的响应值,在进行局部最大值抑制或阈值选择时,容易出现真实角点定位的定位偏差或漏检。

改进 Harris 算法解决了 Harris 算法在检测 T 型、斜 T 型角点存在的定位偏差问题,算法中对真实角点的 8-邻域范围进行局部分析,真实角点的 K 值在其邻域范围内应是最小的,这一判据能够有效地剔出角点周围像素的影响,避免角点的定位偏差问题,但仅仅这一判据还不能确定该像素点一定是角点,下一步要根据目标像素的 K 值判断其附近像素的分布情况,并从中选出可能的候选角点,利用 Harris 的角点响应函数值来计算,从中选出真实角点。改进算法能够准确地定位 T 型、斜 T 型的角点,当然该算法也继承了 Harris 算法对其他类型角点定位准确的优点,对 L 型、Y 型、X 型都能准确定位。

对 5 种类型角点的人工合成图像采用改进 Harris 角点算法后的检测结果如表 1 所示。

表 2 Harris 算法与改进 Harris 算法在运行时间上的对比(单位:秒)

Tab. 2 Comparison of run time between Harris algorithm and improved algorithm(unit:second)

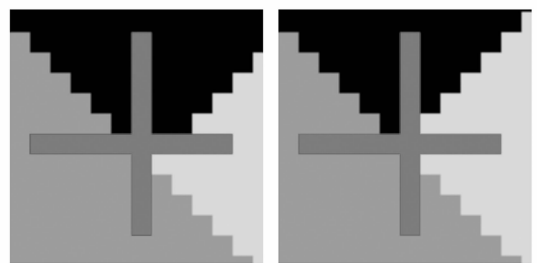
图像大小	256×256	512×512	960×960	1 280×1 280	1 600×1 200
Harris 算法	0.176 396	0.737 612	2.619 013	4.660 727	5.485 259
改进 Harris 算法	0.022 453	0.215 666	0.259 254	0.475 583	0.536 780

将上述结果与 Harris 检测结果比较可以看出,改进 Harris 算法继承了原始 Harris 算法对 L 型、Y 型、X 型角点检测准确的特点,并且对 T 型和斜 T 型也能定位准确,如图 5 所示。



(a) T 型角点检测结果对比(放大 8 倍)

(a) Comparison of detection results to corners of T type(enlarge 8 times)



(b)斜 T 型角点检测结果对比(放大 8 倍)

(b) Comparison of detection results to corners of diagonal T type(enlarge 8 times)

图 5 Harris 算法(左)与改进算法(右)对 T 型和斜 T 型角点的检测结果对比

Fig. 5 Comparison of detection results to corners of T and diagonal T types between Harris algorithms (left) and improved algorithms (right)

5.2 效率分析

本文用 Harris 算法计算了图像中的每一个像素点(边界除外)的 CRF 值。假设 Harris 算法采用直径为 5 的圆形窗口(共 21 个像素),方向导数采用 Sobel 算子,则在计算每个像素的 CRF 值过程中乘法次数为: $(4+1+2+2+1) \times 21+4=214$;加法次数为: $(3+3+3) \times 21+2=191$ 。对于分辨率为 $N \times N$ 的图像,不考虑边界的影响,其算法复杂度为 $214 \times N \times N$ 次乘法+ $191 \times N \times N$ 次加法,由于一次乘法的时间要远多于一次加法,因此在实时性要求较高的场合,Harris 算法就显得速度较慢了。

改进 Harris 算法主要是在计算 CRF 值之前对像素点做了一个初始选择,这一部分主要是加法运算,运算量为 $8 \times N \times N$ 。由于不涉及乘法运算,虽然在此增加了计算量,但后续的 Harris 算法剔除了大量的非像素点,而不必计算每个像素点的 CRF 值,大大减少了乘法的计算次数,计算效率在分辨率高的图像中可以明显地体现出来。本文中的几次实验,预处理后,剔除像素点比例占

总像素点的 60%以上,乘法计算量一般都能降低一半。表 2 为 Harris 算法与改进 Harris 算法在对一组灰度图像进行角点提取时所耗费的计算时间的比较:从表中可以看出改进算法的时间约为原算法的 14.3%,大大缩短了计算时间,有利于在实时处理中应用。

6 结 论

本文分析了 Harris 角点检测算法的原理及存在的缺点,提出了改进的 Harris 算法。该算法分析了目标像素点 8-邻域内的灰度分布,计算与之相似的像素点数目(K),通过分析 K 的取值,剔除一些非角点像素点,剩余的为候选角点,再利用 Harris 的角点响应函数计算其响应值,进而提取真正的角点。实验结果证明,改进算法的角点检测时间仅为原算法的 14.3%,并实现了对 T 型、斜 T 型角点的准确定位。该算法适合于对实时性要求较高的图像检测与处理场合。

参考文献:

- [1] KITCHEN L, ROSENFELD A. Gray-level corner detection [J]. *Pattern Recognition Letters*, 1982, 1(2):95-102.
- [2] MOKHTARIAN F, SUOMELA R. Robust image corner detection through curvature scale space [J]. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1998, 20(12):1376-1381.
- [3] FREEMAN H, DAVIS L S. A corner finding algorithm for chain-coded curves [J]. *IEEE Transaction on Computers*, 1977, C-26(3):297-303.
- [4] WANG H, BRADY M. Real-time corner detection algorithm for motion estimation [J]. *Image and Vision Computing*, 1995, 13(9):695-703.
- [5] MORAVEC H P. Towards automatic visual obstacle avoidance [C]. *Proceedings of International Joint Conference on Artificial Intelligence, Cambridge, MA, USA*, 1977:584-590.
- [6] HARRIS C, STEPHENS M. A combined corner and edge detector [C]. *Proceedings of the Fourth Alvey Vision Conference, Manchester, UK*, 1998:147-151.
- [7] TRAJKOVIC M, HEDLEY M. Fast corner detection [J]. *Image and Version Computing*, 1998, 16(2):75-87.
- [8] SMITH S M, BRADY M. SUSAN—a new approach to low level image processing [J]. *International Journal of Computer Version*, 1997, 23(1):45-78.
- [9] SCHIMID C, MOHR R, BAUCKHANE C. Evaluation of interest point detectors [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2000, 37(2):151-172.
- [10] 陈白帆, 蔡自兴. 基于尺度空间理论的 Harris 角点检测 [J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2005, 36(5):751-754.
CHEN B F, CAI Z X. Harris corner detection based on theory of scale space [J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2005, 36(5):751-754. (in Chinese)

- [11] MIKOLJCZYK K, SCHMID C. Indexing based on scale-invariant features[C]. *Proceedings of International Conference on Computer Vision, Vancouver*, 2001:525-531.
- [12] 王展,皇甫堪,万建伟,等. 基于多尺度小波变换的二维图像角点检测技术[J]. *国防科技大学学报*, 1999, 21(2): 46-49.
WANG ZH, HUANG P K, WAN J W, *et al.*. Multi-scale wavelet based two dimensional corner detection[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 1999, 21(2):46-49. (in Chinese)
- [13] 李博,杨丹,王小洪. 基于 Harris 多尺度角点检测的图像配准新方法[J]. *计算机工程与应用*, 2006, 42(35):37-40.
LI B, YANG D, WANG X H. Novel image registration based on harris multi-scale corner detection algorithm[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2006, 42(35):37-40. (in Chinese)

作者简介:王 崑(1974—),男,陕西西安人,副教授,博士研究生,主要研究方向为逆向工程、优化设计、计算机辅助设计以及制造业信息化。E-mail: lhww11@tom.com

唐一平(1946—),男,陕西西安人,教授,博士生导师,主要研究方向为快速成型制造及快速模具。E-mail: yptang@mail.xjtu.edu.cn

●下期预告

激光二极管阵列侧泵浦 Nd:YAG 板条热效应的研究

李 隆^{1,2},董武威¹,史 彭^{1,2},甘安生^{1,2}

(1. 西安建筑科技大学 理学院物理系,陕西 西安 710055;

2. 西安建筑科技大学 应用物理研究所,陕西 西安 710055)

为了解决激光二极管阵列侧面泵浦激光板条引起的热效应问题,建立了符合激光板条工作特点的热模型,基于热传导理论,对于侧泵板条温度场与热形变场分布进行了解析研究。首先,通过激光二极管阵列侧面泵浦激光板条工作状态的分析,建立了符合实际情况的热模型。提出了求解 Poisson 方程的新方法,得到了侧泵板条温度场与热形变场的一般解析表达式。接着,以 Nd:YAG 板条为例,分析了侧泵 Nd:YAG 板条温度场、热形变场的分布情况。结合全固态激光器的设计需要,定量研究了激光二极管阵列不同泵浦功率与不同泵浦光斑下 Nd:YAG 板条温度场分布情况。计算结果表明:使用输出功率为 30 W 的激光二极管阵列侧面泵浦 Nd:YAG 板条,若耦合到板条侧面的高斯光斑半径为 150 μm 、板条铍离子掺杂质量分数为 1.0%时,板条泵浦面具有 102.3 $^{\circ}\text{C}$ 的最高温升,泵浦面与通光端面产生 1.54 μm 和 2.66 μm 的最大热变形量。激光板条温度场解析方法解决了使用数值分析法造成研究精确度不高的问题,该方法还可以应用到激光系统的其他热问题研究中,为减弱激光系统中的热问题提供了理论依据。